Opción A

Ejercicio nº 1 de la Opción A del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

[2’5 puntos] Determina un punto de la curva de ecuación $y = x e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

Solución

La pendiente genérica de la función $f(x) = x e^{-x^2}$ es la función $f'(x) = 1\cdot e^{-x^2} + x\cdot e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\cdot(1 - 2x^2)$

Consideramos la función $g(x) = e^{-x^2}\cdot(1 - 2x^2)$ y le buscamos los extremos.

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

En nuestro caso

$g'(x) = e^{-x^2}\cdot(1 - 2x^2)\cdot(- 2x) + e^{-x^2}\cdot(- 4x) = e^{-x^2}\cdot(4x^3 - 6x)$

$g'(x) = 0$, implica $4x^3 – 6x = 0$, pues la exponencial nuca es 0.

De $4x^3 – 6x = 0 = x(4x^2 – 6) = 0$, obtenemos $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, que serán los posibles máximos o mínimos.

$g''(x) = e^{-x^2}\cdot(4x^3 - 6x)\cdot(- 2x) + e^{-x^2}\cdot(12x^2 - 6) = e^{-x^2}\cdot(–8x^4 + 24x^2 - 6)$

Como $g''(0) = - 6 < 0$, **$x = 0$** es un máximo relativo, y **es el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima**.

Como $g''\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{12}{e^{3/2}} > 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ son mínimos relativos,

Ejercicio nº 2 de la Opción A del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

Sea $I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(a) [1’25 puntos] Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$

(b) [1’25 puntos] Calcula el valor de I

Solución

(a)

$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

$t = 1 + x^2$, $dt = 2xdx$, de donde $xdx = dt/2$

Si $x = 0$, $t = 1$

Si $x = 2$, $t = 5$

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^2 \frac{x^2\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_1^5 \frac{(t - 1)(dt/2)}{\sqrt{t}} =$$

(b)

$$= \int_1^5 \frac{(t - 1)(dt/2)}{\sqrt{t}} = (1/2)\int_1^5 (t^{1/2} - t^{-1/2})\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_1^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{5^{3/2}}{3/2} - \frac{5^{1/2}}{1/2}\right) - \left(\frac{1^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{1/2}}{1/2}\right)\right] = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}$$

Ejercicio nº 3 de la Opción A del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

(a) [1 punto] Calcula el valor de a para que $A^2 – A = \begin{pmatrix} 12 & –1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

(b)[1 punto] Calcula, en función de a, los determinantes 2 A y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

(c) [0’5 puntos] ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix};\ A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$$

De donde $a^2 - a = 12$ y $a^2 + a = 20$. Sumando obtenemos $2a^2 = 32$, luego $a = \pm 4$.
Solamente a = +4 verifica las dos ecuaciones
(b)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2$$

De $|kA_n| = k^n|A|$, obtenemos que $|2A| = 2^2(-a^2) = -4a^2$
Sabemos que el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta, luego $|A^t| = |A| = -a^2$
También se puede hacer determinando las matrices 2A, A^t y calculando su determinante.
(c)
Sabemos que una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta. En las matrices simétricas se tiene la propiedad de que sus elementos son simétricos respecto a la diagonal principal, cosa que no ocurre con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, pues uno es 0 y el otro 1.
También se puede hacer igualando $A = A^t$ y al resolverlo obtenemos el absurdo 0 = 1.

Ejercicio nº 4 de la Opción A del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$.
(a) [1 punto] Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.
(b) [0'751 puntos] Para m = - 3, halla el plano que contiene a lo recta r y es perpendicular al plano π.
(c) [0'5 puntos] Para m = - 3, halla el plano que contiene a lo recta r y es paralelo al plano π.

Solución

(a)
Ponemos la recta "r" en paramétricas, la sustituimos en el plano y obtenemos una ecuación en un parámetro "b". Cuando exista solución para dicho parámetro la recta cortará al plano
Recta "r" $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$, punto A(5,0,6). Vector director **u** = (-2, 1, m)
Recta "r" en paramétricas $\begin{cases} x = 5 - 2b \\ y = b \\ z = 6 + mb \end{cases}$
Sustituimos la recta en el plano π
$2(5 - 2b) + (b) - (6 + mb) + 2 = 0 = b(-3 - m) + 6$, de donde $b = 6/(3 + m)$ lo cual tiene solución si el denominador no es cero, es decir si $m \neq -3$.
Luego para cualquier valor de m distinto de -3 la recta corta al plano en un solo punto, pues la solución de "b" es única. Cuando m = -3 la recta es paralela al plano
(c)
Para m = -3 la recta es paralela al plano, luego el plano pedido es de la forma $2x + y - z + K = 0$, le imponemos la condición de que pase por un punto de la recta, el A(5,0,6) y tenemos $2(5) + (0) - (6) + K = 0$, de donde K = -4 y el plano pedido es $2x + y - z - 4 = 0$
(b)
Lo hacemos por haz de planos a partir de la recta.
Ponemos la recta "r" $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$ en implícitas para lo cual igualamos dos a dos.
$\frac{x-5}{-2} = y$ e $y = \frac{z-6}{-3}$, de donde nos queda $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$
Formamos el haz de planos $(x + 2y - 5) + b(3y + z - 6) = 0$ y lo consideramos como un plano π' de ecuación $x + (2 + 3b)y + bz + (-5 - 6b) = 0$ con vector normal **n'** = (1, 2 + 3b, b)
El plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ tiene de vector normal **n** = (2,1,-1)
Como me dicen que el plano que contiene a la recta tiene que ser perpendicular al plano π , los vectores normales también son perpendiculares y su producto escalar cero, es decir:
n• n' = 0 = (2,1,-1) • (1, 2 + 3b, b) = 2 + 2 +3b – b = 4 + 2b, de donde b = -2 y el plano pedido es $(x + 2y - 5) + (-2)(3y + z - 6) = 0 = x - 4y - 2z + 7 = 0$
Otra forma de hacerlo (Vicenta Serrano Gil)
Como vectores direccionales del plano podemos utilizar el normal del plano π, (2, 1, -1), y por contener a la recta "r", el direccional de la recta r: (-2, 1, -3). El punto A(5, 0, 6) de la recta es un punto del plano pedido.

Su ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z-6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-5)+8y+4(z-6)=0 \Rightarrow -2x+8y+4z-14=0 \Rightarrow x-4y-2z+7=0$$

Opción B

Ejercicio nº 1 de la Opción B del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$, para $\neq 0$.

(a)[0.75 puntos] Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.
(b)[1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.
(c)[0.75 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

(a)

Corte con el eje OY: No tiene porque no está definida la función para $x \neq 0$.

Corte con el eje OX: $\dfrac{x^4+3}{x} = 0 \Rightarrow x^4+3=0 \Rightarrow x=\sqrt[4]{-3}$ No tiene solución real.

La función no tiene cortes con los ejes.

x = 0 es asíntota vertical pues $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^4+3}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^4+3}{x} = -\infty$

No tiene asíntota horizontal porque que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = +\infty$

No tiene asíntota oblicua y ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^4+3}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3}{x^2} = +\infty$

(b)

$f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{3(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^2} > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) > 0 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} (x+1)>0 \text{ y } (x-1)>0 \Rightarrow x>1 \\ \text{o} \\ (x+1)<0 \text{ y } (x-1)<0 \Rightarrow x<-1 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow \dfrac{3(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^2} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) < 0 \Rightarrow$

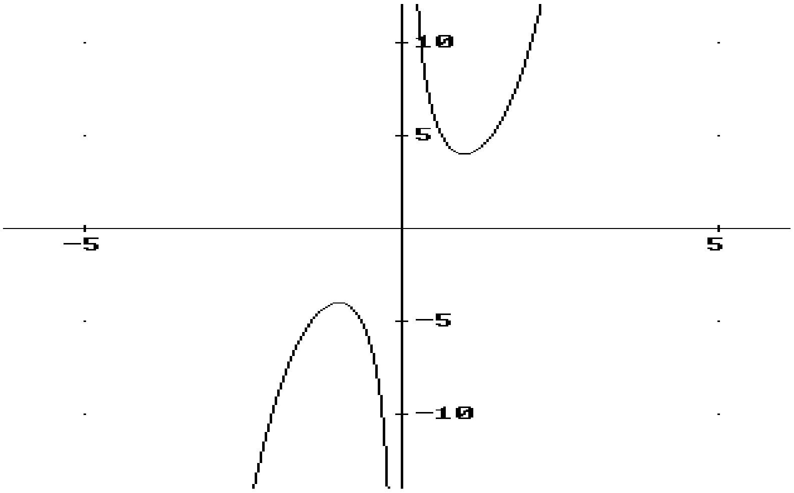
$$\left\{\begin{array}{l} (x+1)>0 \text{ y } (x-1)<0 \Rightarrow x>-1 \text{ y } x<1 \\ o \\ (x+1)<0 \text{ y } (x-1)>0 \text{ (condiciones incompatibles)} \end{array}\right. \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (-1,0)\cup(0,1)$$

Del estudio anterior deducimos que la función tiene un máximo relativo en (-1,-4) y un mínimo relativo en (1,4).

Otra forma de hacerlo (Estudiando la 1ª derivada)

$f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$; $f'(x)=0 \Rightarrow x^4-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Como f '(-2) > 0, f(x) es estrictamente creciente en (-∞, -1)
Como f '(-0'5) < 0, f(x) es estrictamente decreciente en (-1, 1) – {0} (No está definida en el cero)
Como f '(2) > 0, f(x) es estrictamente creciente en (1, +∞)
Por definición x = -1 es un máximo relativo que vale f(-1) = - 4
Por definición x = 1 es un mínimo relativo que vale f(1) = 4
(c)
Un esbozo de la gráfica es

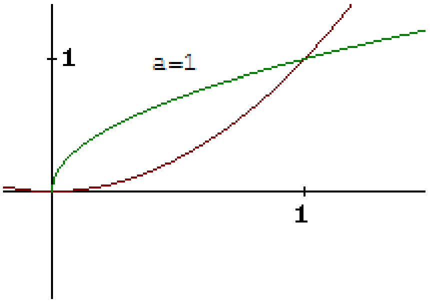


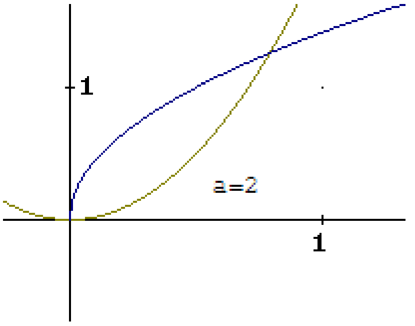
Ejercicio nº 2 de la Opción B del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

[2.5 puntos] El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \frac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con a > 0, vale 3. Calcula el valor de a.

Solución

La visualización de los gráficos de estas funciones para el caso a=1 y a=2 respectivamente nos permite hacernos una idea del recinto que estas curvas encierran:





Cálculo del punto de corte de ambas gráficas:

$$\frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = ax \Rightarrow x^4 = a^3x \Rightarrow x(x^3 - a^3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = a$$

El área del recinto limitado por las dos curvas:

$$\int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \left[\frac{2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3a}\right]_0^a = 3 \Rightarrow \frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3} = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

Ejercicio nº 3 de la Opción B del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

[2.5 puntos] Resuelve $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución

De la igualdad matricial anterior deducimos el sistema:

$\begin{cases} 2x + 5z = 7 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$. Como Det $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ =16; el sistema es compatible determinado, obteniéndose su solución fácilmente aplicando el método de reducción de Gauss – Jordan o bien la fórmula de Cramer , resultando x = 1, y = -1, z = 1.

Ejercicio nº 4 de la Opción B del modelo 3 (Junio) de sobrantes de 2006

Considera el punto P(3, 2, 0) y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
(b) [1'5 puntos] Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

Solución

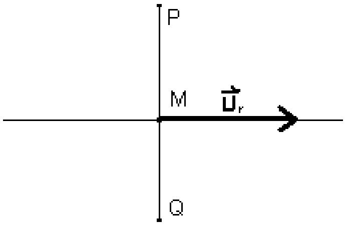
(a)

Expresamos r en paramétricas: $\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 4 + 3\alpha \quad \alpha \in \Re \\ z = \alpha \end{cases}$

La ecuación del plano pedido la construimos considerando como vectores direccionales del mismo $\overrightarrow{u_r} = (-2,3,1)$ $\quad \overrightarrow{PP_r} = (-4,2,0)$. Pudiendo considerar vectores de componentes proporcionales que tendrán la misma dirección:

Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 4z - 7 = 0$

(b)



Sea M el punto medio del segmento PQ, M es un punto de la recta que verifica la siguiente condición:
$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$. Desarrollando la condición del producto escalar nulo obtenemos:

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Rightarrow (-4 - 2\alpha, 2 + 3\alpha, \alpha) \cdot (-2,3,1) = 0 \Rightarrow 8 + 4\alpha + 6 + 9\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones paramétricas de r obtenemos el punto M:
$M = (1,1,-1)$. Puesto que M es el punto medio del segmento PQ, se tiene:

$$\frac{3 + q_1}{2} = 1 \Rightarrow q_1 = -1$$

$$\frac{2 + q_2}{2} = 1 \Rightarrow q_2 = 0$$

$$\frac{q_3}{2} = -1 \Rightarrow q_3 = -2$$

Con lo cual el simétrico es el punto Q = (-1, 0, -2)